DOI:10.6060/snt.20216501.0008
УДК 004.94

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА ПРИ РАЗРАБОТКЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

С.П. Бобков, И.А. Астраханцева, Э.Г. Галиаскаров

Сергей Петрович Бобков, Ирина Александровна Астраханцева,
Эдуард Геннадьевич Галиаскаров
Кафедра информационных технологий и цифровой экономики
Ивановский государственный химико-технологический университет, просп. Шереметевский,7, Иваново, Российская Федерация, 153000
E-mail: bsp@isuct.ru, i.astrakhantseva@mail.ru , galiaskarov_eg@isuct.ru

В статье описывается возможность использования методов системного анализа для рассмотрения последовательной иерархии математических моделей. Отмечается, что в зависимости от необходимой глубины детализации свойств объекта, подлежащих отражению в модели, выделяются характерные уровни абстракции. Указывается, что сформировавшиеся классические подходы к моделированию, включающие модели с распределенными или сосредоточенными параметрами, не в полной мере удовлетворяют требованиям современных исследователей. Предлагается введение дополнительного, промежуточного уровня абстракции математических моделей, к которому следует отнести модели в виде систем дискретных элементов. Показано, что дискретные модели во многом объединяют достоинства, присущие моделям базовых, уровней и могут служить хорошей альтернативой традиционным подходам к моделированию различных объектов.

Ключевые слова: системный анализ; математическое моделирование; дискретные модели.

APPLICATION OF A SYSTEM APPROACH IN DEVELOPING MATHEMATICAL MODELS

S. Bobkov, I. Astrakhantseva (ORCID 0000-0003-2841-8639), E. Galiaskarov

Sergey Petrovich Bobkov, Irina Alexandrovna Astrakhantseva, Eduard G. Galiaskarov
Department of information technology and digital economy
Ivanovo state University of chemical technology, prosp. Sheremetevskiy ave.,7, Ivanovo, Russian Federation, 153000
E-mail: bsp@isuct.ru, i.astrakhantseva@mail.ru, galiaskarov_eg@isuct.ru

The article discusses the possibility of using the methods of systems analysis to consider the sequential hierarchy of mathematical models. It is noted that, depending on the required depth of detail of the properties of the object to be reflected in the model, characteristic levels of abstraction are distinguished. It is indicated that classical approaches to modeling, including models with distributed or lumped parameters, do not fully meet the requirements of modern researchers. It is proposed to introduce an additional, intermediate level of abstraction of mathematical models, which should include models in the form of systems of discrete elements. It is shown that discrete models in many respects combine the advantages inherent in models of basic, levels and can serve as a good alternative to traditional approaches to modeling various objects.

Keywords: system analysis; mathematical simulation; discrete models.

Введение

Современные условия развития производства требуют активного использования передовых достижений науки и техники, широкого внедрения прогрессивных методов поиска. Данное требование обусловлено также необходимостью выполнения многовариантных исследований при создании новых технологий. В таких условиях нельзя обойтись без массового использования математических и имитационных методов и моделей, позволяющих существенно сократить время и затраты на проектирование, прогнозирование и оптимизацию технологических и технико-экономических процессов.

С другой стороны, ценность моделирования заключается не только в применении существующих моделей. Процесс разработки модели и ее исследование являются не менее важными этапами с точки зрения научной ценности, поскольку здесь рождается и структурируется информация о задачах, функциях и структуре исследуемого объекта или явления.

Иерархия математических моделей.

При создании моделей сложных объектов важная роль отводится системному подходу, который не только расширяет возможности фундаментальных исследований, но облегчает создание практических приложений. Рассмотрение объекта с системных позиций дает возможность трактовать его целостность, как совокупность отдельных элементов и связей между ними. При этом реальное устройство или процесс представляется системой, в которой каждая составляющая часть имеет свою определенную функцию [1, 6].

Одним из важнейших моментов применения системного подхода при создании математических моделей является возможность использования многоуровневой иерархии моделей [8]. Известно, что на одном из первых этапов разработки моделей – при постановке задачи, исследователь выбирает те свойства реального объекта-прототипа, которые подлежат отражению в модели. При этом несущественные, по мнению исследователя, свойства отбрасываются. Степень выделения некоторых конкретных свойств из множества, т.е. глубина абстрагирования, приводит к появлению моделей, принадлежащих к разным уровням абстракции. Это позволяет скрыть второстепенные детали, которые не нужны на конкретном уровне абстракции и, тем самым, повысить экономичность модели.

При моделировании технических объектов и систем, проводя классификацию моделей по степени детализации, часто выделяют две крупные группы: модели с сосредоточенными параметрами и модели с распределенными параметрами [7]. В основе такого разделения лежит влияние пространственных размеров объекта на адекватность его модельного описания.

Если для адекватного описания поведения объекта следует рассматривать зависимость параметров от времени и положения в пространстве, используются модели с распределенными параметрами. Модели этого типа описывают процессы переноса энергии и массы. Однако физическими явлениями их применение не ограничивается, и они применяются в биологии и медицине. Базовым математическим аппаратом для таких моделей служат дифференциальные уравнения с частными производными (уравнения математической физики), поскольку именно в них в качестве независимых переменных выступают пространственные координаты и время.

В случаях, когда можно считать, что все протекающие в объекте процессы зависят только от времени, и можно абстрагироваться от размеров объекта, применяются модели с сосредоточенными параметрами. Они используются для изучения объектов и явлений в подавляющем большинстве областей науки. Вывод из рассмотрения пространственных координат приводит к тому, что в моделях остается единственная независимая переменная – время. Поэтому, если соблюдаются условия детерминированности, основным инструментом здесь являются обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы. Для анализа стационарных условий модели с сосредоточенными параметрами описываются системами алгебраических уравнений.

Сравнивая описанные два класса моделей, нетрудно заметить, что модели с сосредоточенными параметрами имеют более высокую степень абстракции. Безусловно, иерархия математических моделей не ограничивается двумя данными уровнями. Например, если полностью игнорировать влияние независимых переменных на параметры объекта и исключить из рассмотрения не только координаты, но и время, можно получить балансовые соотношения, также характерные для многих приложений. И наоборот, уравнения математической физики были получены с помощью локального усреднения свойств вещества. Поэтому если не игнорировать детали внутреннего строения тел (наличие молекул, ионов), то можно получить модели, уровень абстракции которых расположен ниже, чем у моделей с распределенными параметрами. Данные рассуждения полностью лежат в рамках системного подхода и иллюстрируют его широкие возможности в процессе создания математических моделей объектов и систем.

Необходимость рассмотрения дополнительных уровней иерархии.

Рассмотрим сосредоточенность и распределенность параметров с точки зрения достоинств и недостатков практического использования моделей. В качестве конкретного примера возьмем процесс нагрева.

Если некоторое твердое тело рассматривать, как единый объект, нагревающийся под действием теплового потока, то изменение его температуры можно описать, например, в таком виде:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C\rho} q(t) \qquad (1)$$

где T – температура; C, ρ- теплоемкость и плотность материала тела; $q(t)$ – мощность теплового потока, отнесенная к единице объема; t- время.

Уравнение (1) является типичным примером модели с сосредоточенными параметрами. Оно позволяет найти изменение температуры объекта во времени. Для решения приведенного уравнения следует указать закон изменения во времени теплового потока и задать начальные условия (температуру в начальный момент времени).

Заметим, что в модели (1) рассматривается некоторая усредненная температура тела. И если исследователю важно провести анализ изменения температуры не только во времени, но и различных точках объекта, то следует перейти к более подробной детализации процесса и ввести в рассмотрение координатыточек пространства.Двухмерную постановку задачи можно представить в виде следующего уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C\rho}\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \gamma\right] \qquad (2)$$

где λ- теплопроводность материала; γ- удельная мощность источников тепла; x, y- координаты.

Уравнение (2) следует дополнить одним начальным и, в общем случае, четырьмя граничными условиями, уточняющими протекание процесса.

Здесь мы имеет пример модели с распределенными параметрами, поскольку в качестве независимых переменных в уравнение входят время и пространственные координаты.

Сравнивая модели (1) и (2) можно заметить следующее. Модель (1), находящаяся на более высоком уровне абстракции, проще в использовании и, соответственно, экономичнее. Однако она менее информативная, поскольку имеет дело с усредненными искомыми параметрами. Модель (2), имеющая более низкий уровень абстракции, дает исследователю значительно больше информации о поведении объекта, и ее решение позволяет определить искомый параметр (температуру) в любой точке рассматриваемой плоскости и в любой момент времени,но при ее использовании увеличиваются сложности. И дело не в количестве вычислительных процедур, с которыми без труда справляются современные компьютеры. Проблемы возникают на этапе постановки задачи, при определении дополнительных условий (в основном граничных).

Возникает идея каким-либо образом объединить сравнительную простоту первой модели с информативностью второй. Системный подход позволяет это сделать следующим образом. Следует трактовать изучаемый объект, как систему, состоящую из отдельных дискретных элементов [2, 10]. Это сохраняет принцип распределенности параметров. В то же время, каждый отдельный элемент уже является целостной единицей с сосредоточенными свойствами. По сути, предлагается промежуточный уровень системной иерархии моделей, расположенный между двумя, рассмотренными выше уровнями.

В последние годы данное направление положено в основу целого ряда методов моделирования, таких, как использование систем клеточных автоматов, взаимодействующих тьюрмитов, агентных систем [5, 9]. Перспективность использования дискретных методов основана на предположении, согласно которому глобальное поведение системы определяется локальными взаимодействиями составляющих ее элементов.

Примеры использования

В качестве иллюстрации возможностей дискретных моделей приведем примеры использования систем клеточных автоматов для анализа рассмотренного выше процесса нагрева. Опуская подробности методики получения функциональных зависимостей, описанные ранее [2 - 4], приведем окончательное выражение для двухмерной задачи определения температуры дискретного элемента с локальными координатами i, j:

$$T_{i,j}(t_{k+1}) = T_{i,j}(t_k) + \frac{\Delta t}{C_{i,j}\rho_{i,j}}\left[\sum q_{i,j}(t_k) + \gamma(t_k)\right] \qquad (3),$$

где t_k, t_{k+1} – моменты дискретного времени; Δt– шаг дискретизации времени.

Результаты моделирования теплопроводности с учетом нелинейности некоторых параметров и неоднородности среды представлены на рис.1, где показаны профили температуры, спустя 20 сек после начала процесса.

Модельным объектом была выбрана плоская пластина, разбитая на элементы (клетки) с шагом 1 мм. Характеристики материала принимались следующими: удельная теплоемкость 1000 Дж/(кг·К); плотность 1500 кг/м^3; теплопроводность 1,5 Вт/(м·К). В исходном состоянии начальная температура среды и пластины принята равной 0 условных градусов.

Величина шага моделирования по времени равнялась 0,005 с. При имитации процесса предполагалось, что теплоотдача в окружающую среду отсутствует.

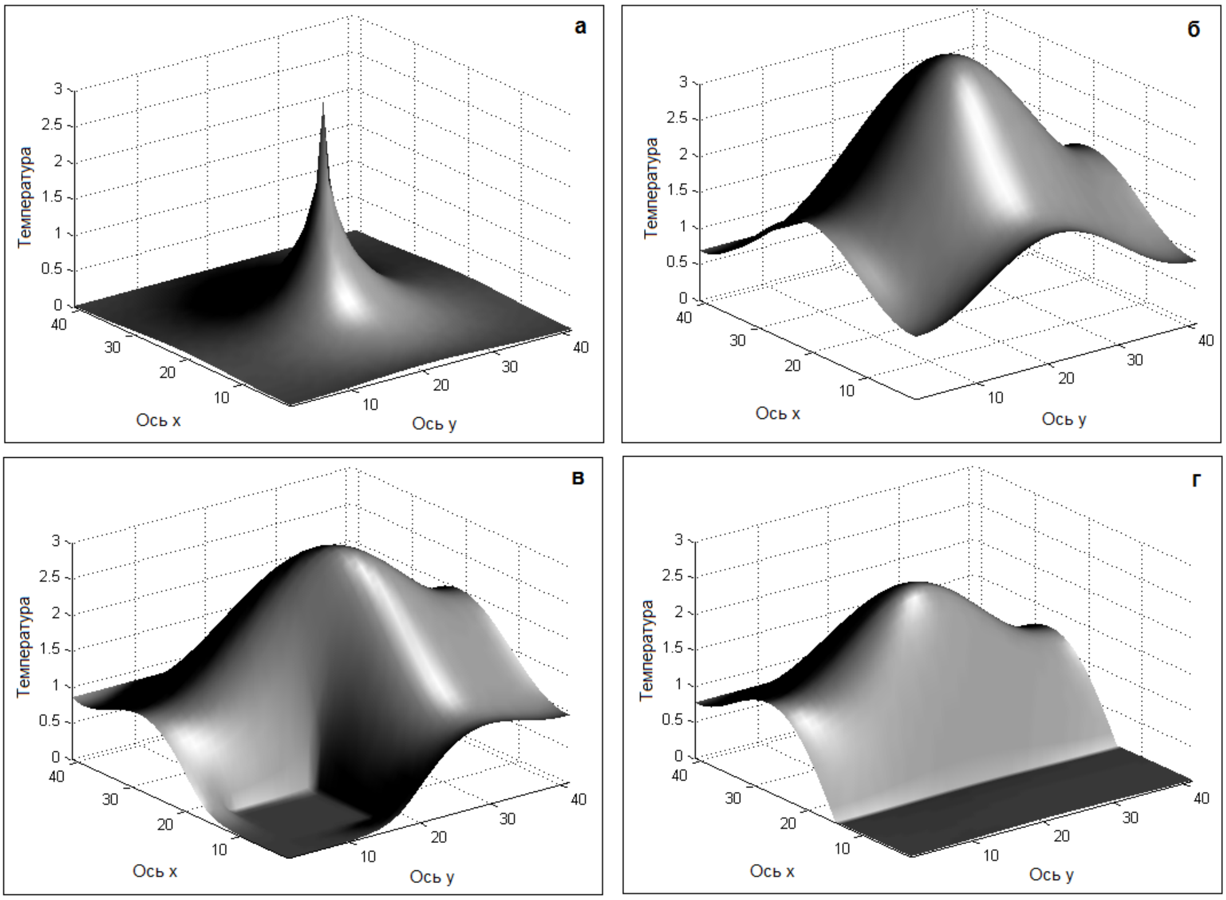

Рис. 1. Профили температуры при нагревании пластины:

а) – при наличии точечного источника тепла с постоянной температурой;

б) – при наличии объемного экзотермического источника тепла

в) - при наличии объемного источника тепла и зоны аномальной теплопроводности;

г) - при наличии объемного источника тепла и теплоизолирующего участка.

На рис. 1а показан случай, когда в центре пластины расположен точечный источник тепла с постоянной температурой. Рис. 1б имитирует начальную стадию процесса горения. Здесь в рассмотрение введен объемный источник тепла, объемная мощность которого экзотермически зависит от температуры. На рис. 1в и 1г рассмотрен теплоперенос в условиях аналогичных предыдущему примеру, но при неоднородности материала пластины. В обоих случаях объект имеет аномальную зону, материал которой имеет значительно (на два порядка) меньшую теплопроводность по сравнению с основной массой. На рис. 1в аномальная зона имеет прямоугольную форму, на рис. 1г имеется своего рода теплоизолирующая полоса, разделяющую пластину на две части.

Обсуждение и выводы.

Описанные в данной работе дискретные модели, относящиеся к промежуточному уровню системной иерархии, по отношению к традиционным уровням, представляются более удобными в реализации.

Принципиальное отличие от классических моделей состоит в том, здесь сделана попытка объединить распределенность параметров, присущую уравнениям математической физики и локальность взаимодействия, характерную для моделей с сосредоточенными параметрами. Кроме того, дискретная модель позволяет достаточно легко описывать нелинейные явления, процессы в объектах с границами сложной формы и процессы в неоднородных средах. Все это позволяет не только отмечать достоинства дискетных моделей, но и рекомендовать их использование для моделирования и анализа работы технологического оборудования современных производств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анфилатов В. С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А Системный анализ в управлении. М.: Финансы и статистика, 2009. 368 с.

2. Бобков С.П. Использование дискретных подходов для моделирования основных процессов химической технологии / Российский химический журнал. 2019. Т. 63, № 3-4, с. 22-30.

3. Бобков С.П. Моделирование основных процессов переноса с использованием клеточных автоматов / Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2009, Т.52, № 3, с.109-114.

4. Бобков С.П., Галиаскаров Э.Г. Моделирование процесса теплопроводности с использованием систем клеточных автоматов / Программные продукты и системы. 2020. № 4, с. 641 – 650.

5. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. М.: Озон, 2016. 280 с.

6. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. / Под ред. С.В. Емельянова. М.: Мир, 1978. 312 с.

7. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 430 с.

8. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Основы системного анализа. Томск: НТЛ, 2001. 389 с.

9. Тоффоли Т., Марголус Н. Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991. 280 с.

10. Wolfram S. Statistical mechanics of cellular automata / Reviews of Modern Physics. – July / September 1983. V. 5, p. 601-610.

11. Галиаскаров Э.Г., Бобков С.П., Трифонова А.А. Использование BPM-систем для повышения эффективности бизнес-процессов // Известия высших учебных заведений. Серия: Экономика, финансы и управление производством. – ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», г. Иваново. – 2019, 1(39), с. 38-44.

REFERENCES

1. Anfilatov V. S., Emel'yanov A.A., Kukushkin A.A Sistemnyj analiz v upravlenii. M.: Finansy i statistika. 2009. 368 s.

2. Bobkov S.P. Ispol'zovanie diskretnyh podhodov dlya modelirovaniya osnovnyh processov himicheskoj tekhnologii / Rossijskij himicheskij zhurnal 2019. T. 63 № 3-4, s. 22-30.

3. Bobkov S.P. Modelirovanie osnovnyh processov perenosa s ispol'zovaniem kletoch-nyh avtomatov / Izv. vuzov. Himiya i him. tekhnologiya, 2009, T.52, № 3, s.109-114.

4. Bobkov S.P., Galiaskarov E.G. Modelirovanie processa teploprovodnosti s ispol'-zovaniem sistem kletochnyh avtomatov / Programmnye produkty i sistemy. 2020. № 4. s. 641 – 650.

5. Malineckij G.G., Potapov A.B., Podlazov A.V. Nelinejnaya dinamika: Podhody, re-zul'taty, nadezhdy. M.: Ozon. 2016, 280 s.

6. Mesarovich M., Takahara Ya. Obshchaya teoriya sistem: matematicheskie osnovy. / Pod red. S.V. Emel'yanova. M.: Mir. 1978. 312 s.

7. Norenkov I.P. Osnovy avtomatizirovannogo proektirovaniya. M.: Izdatel'stvo MGTU im. N.E. Baumana, 2009. 430 s.

8. Peregudov F.I., Tarasenko F.P. Osnovy sistemnogo analiza. Tomsk, NTL. 2001. 389s.

9. Toffoli T., Margolus N. Mashiny kletochnyh avtomatov: M.: Mir, 1991. 280 s.

10. Wolfram S. Statistical mechanics of cellular automata / Reviews of Modern Physics. – July / September 1983. V. 5. p. 601-610.

11. Galiaskarov E.G., Bobkov S.P., Trifonova A.A. The use of BPM systems to improve the efficiency of business processes // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavod. Series: Economics, finance and production management. - Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Ivanovo State Chemical-Technological University", Moscow. Ivanovo. - 2019, 1 (39), p. 38-44.