

УДК 330.4

## О МНОГОАСПЕКТНОЙ РОЛИ ПРОИЗВОДНЫХ В АНАЛИЗЕ И МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

Р.Х. Ильясов

*Чеченский государственный университет*

Потоки, являясь более подвижной частью экономической системы, обращают на себя внимание исследователей при поиске тенденций и факторов динамического развития. В то же время большинство исследований о роли потоков в экономике носят вербальный характер или ограничивается их описанием в моделях с дискретным временем. Известная взаимосвязь между запасами и потоками в дискретных моделях реализуется расчётом цепных приростов, что представляется достаточным для решения задач, в частности, бухгалтерского учёта. Более востребованным представляется аналитическое описание потоков непрерывными функциями, способными сохранить точность эмпирических данных, адаптируясь при этом к их структурно-вариативной динамике. В моделях с непрерывным временем решением задачи преобразования функции динамики запасов в поток, становится обращение к дифференцированию. Наиболее удачным математическим конструктом, сохраняющим точность эмпирического экономического сигнала при аппроксимации дискретной динамики запасов становятся кубические сплайны. Непрерывность, дифференцируемость и кусочная структура сплайнов оказываются полезными при работе с потоками – при замене решётчатой функции динамики запасов непрерывной моделью, при преобразовании динамики запасов в потоки, при исследовании цикличности потоков в фазовом пространстве. В работе демонстрируется эффективность обращения к производным кубических сплайнов при моделировании и анализе экономических потоков на примере динамики денежной массы.

**Ключевые слова:** поток, запасы, сплайн, аппроксимация, производная, фазовый анализ

**Введение.** Стремление к повышению точности математического описания процессов заставляет нас искать методы отображения динамики экономических «количеств», избегающие процедуры сглаживания. К основополагающим в экономической теории типам экономических показателей относят «переменные», «потоки» и «запасы». Экономисты обоснованно различают их – как принципиально разных показателей «количеств», исходя, в частности, из их динамических особенностей. Появившиеся достаточно давно понятия о запасах и потоках, и сегодня в экономических исследованиях чаще носят вербальный характер. Необходимость количественного и аналитического исследования запасов и связанных с ними потоков требует поиска математических конструктов, способных описать динамические особенности экономического движения, учитывая при этом известную взаимосвязь между запасами и потоками.

**Целью исследования** является изучение аналитических возможностей производных при моделировании экономических потоков кубическими сплайнами. Для достижения поставленной цели предлагается:

- исследовать аппроксимационные свойства сплайнов, полезные при моделировании экономических потоков;
- решить задачу преобразования показателей типа «запас» в «потоки» дифференцированием сплайн-аппроксимационной модели динамики запасов;
- оценить эффективность исследования цикличности потоков в фазовом пространстве.

Наиболее подробное описание показателей типа «запас» и «поток» мы встречаем в системе национальных счетов (СНС). Под запасами понимают наличие активов или обязательств на конкретный момент времени. Связывая запасы с потоками, СНС поясняет, что они являются результатом накопления от

предыдущих операций с некоторым потоком. В свою очередь потоки определяются как непрерывные добавления к запасам и изъятия из них. Динамику показателей типа запаса (*stockvariables*) представляют с помощью моментных временных рядов, а динамику показателей типа потока (*flowvariables*) – с помощью интервальных временных рядов [1].

К переменным типа запаса, которые могут быть представлены моментными временными рядами, можно отнести объём денежной массы на начало года, стоимость основных фондов на конец года, величину государственного долга, численность населения на конкретный момент времени и другие показатели. В качестве примеров переменных типа потока, которым соответствуют интервальные временные ряды, можно привести объёмы добычи, потребления и экспорта энергоресурсов, изменение стоимости основных фондов, естественное и механическое движение населения, потоки платежей и др.

Чтобы получить полную и последовательную систему, все изменения экономической стоимости между двумя измерениями запасов должны быть представлены в потоках. В словаре современной экономической науки даётся такое определение потока: «Поток (*flow* -  $F$ ) – экономическая величина, которая изменяется в движении, с учётом того периода времени, для которого делается расчёт» [2].

Преобразование запасов в потоки в моделях с дискретным временем выполняется расчётом абсолютных приростов за некоторую единицу времени:  $F_i = S_i - S_{i-1}$ .

Таким образом, приросты запасов будут представлять собой изменения

показателя за определенные промежутки времени, т.е. преобразуются в дискретный поток.

### Методика исследования.

Для математического описания потоков в моделях с непрерывным временем оказывается полезной одна из гениальных фраз практического экономиста [3]:

«Поток – это производная запаса». Таким образом преобразование модельной функции динамики запасов в поток выполняется её дифференцированием:

$$F = \frac{dS}{dt}.$$

Например, на рисунке 1 показано преобразование запаса денежной массы в поток дифференцированием сплайн-аппроксимационной модели запаса. Здесь мы находим аналогию скорости изменения запасов с физической интерпретацией производной, представляющей собой скорость движения.

Если обозначить через  $F(t)$  непрерывную функцию потока, то изменение этого потока на протяжении малого отрезка времени  $(t, t + \Delta t)$  можно определить как производную  $F'(t)\Delta t = F(t + \Delta t) - F(t)$ .

Производная  $F'(t)$  при этом выражает скорость изменения потока – другими словами, первая производная выражает прирост функции потока за малую единицу времени. По определению,  $F'(t)$  есть предел отношения прироста потока за малый отрезок времени к длительности этого отрезка при неограниченном уменьшении последней.

На этом основании производная потока может именоваться мгновенной скоростью потока.

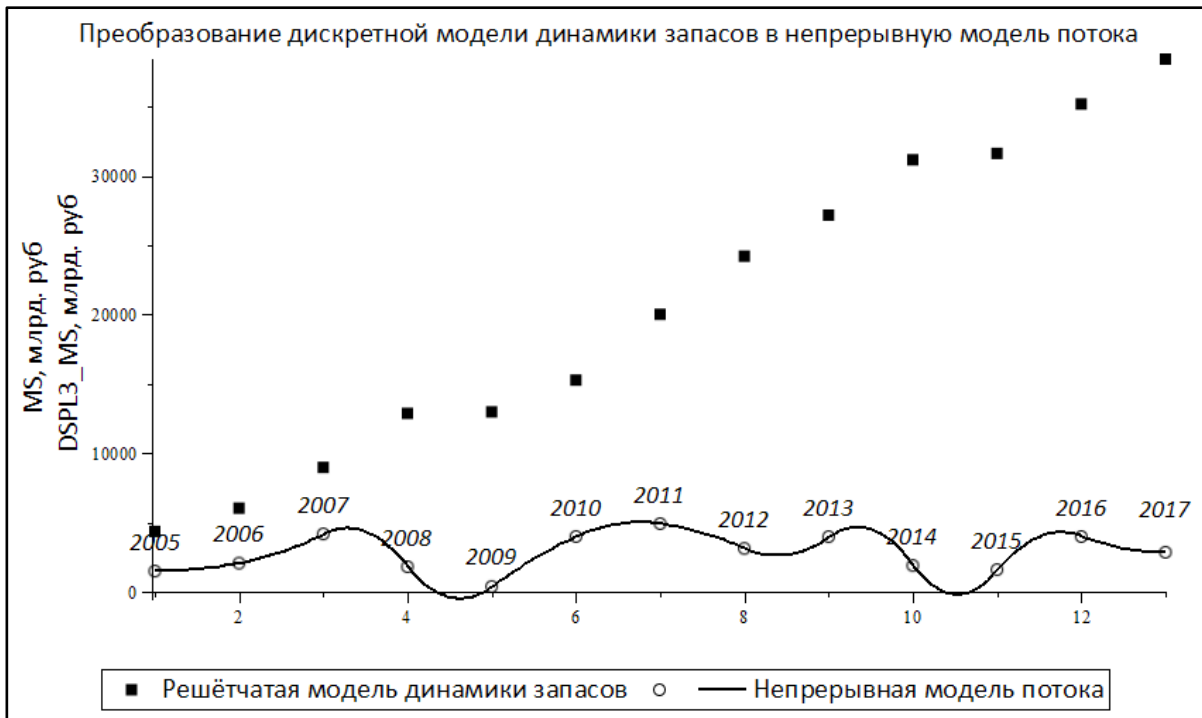


Рисунок 1 – Классическое представление дискретной модели динамики денежной массы (решётчатая модель запаса, точечный график) и сплайновая модель экономического потока денежной массы (непрерывная модель потока, сплошная линия)

Очевидно, возможность преобразования решётчатой функции запасов в непрерывные потоки требует аппроксимации исходной динамики дискретного показателя непрерывными функциями. Выбор аппроксимирующей функции должен учитывать ряд существенных для исследования динамических потоков требований:

- сохранение в точности каждого значения исходного эмпирического сигнала, что достигается совпадением аппроксимирующей функции со всеми узловыми точками решётчатой функции запасов;

- важно учитывать интерполяционное поведение аппроксимирующей функции, учитывая необходимость определения непрерывной функции потока не только в узловых точках, но и внутри интервалов любой временной протяженности;

- адаптивность модельной функции к структурно-вариативной динамике для учёта воздействия «событийных со-

ставляющих» динамики, «выбросов», для исследования взаимосвязи потоков при возможных «переключениях» регрессии;

- непрерывность аппроксимирующей функции для преобразования динамики запасов в потоки дифференцированием, и обратно — для преобразования потоков в запасы интегрированием;

- возможность «погружения» динамических моделей потоков в фазовое пространство для исследования сезонности и цикличности экономического движения.

Кубическая сплайн-функция является тем математическим конструктом, который отвечает приведенным требованиям в полной мере [4]. Сплайн-функция обладает адаптивностью своих модельных построений, она непрерывна и дифференцируема. Обладая одновременно с генерируемой функцией всеми её аналитическими производными, позволяет получать решения «в символах», что полезно всегда, особенно при погружении динамики в фазовое пространство [5]. Ана-

литический модельный сплайновый полином имеет малый порядок, что позволяет экономисту удобно сопоставлять модельную аналитику формул, числовые выкладки и траектории рисунков с экономическим содержанием. На рисунке 2 демонстрируется аппроксимация кубическим сплайном динамики показателя типа «запас» и три производные модельной функции. Производные играют важную роль при исследовании экономической динамики, определяя собой «тенденцию» или скорость экономического движения, а вторая производная представляет «интенсивность» или ускорение движения.

Если исходная функция описывает динамику запасов, то первая производная становится функцией изменения запасов или функцией их потока. Вторая производная представляет собой скорость потока, а третья – его ускорение. Рисунок показывает, как на фоне быстрого роста запасов денежной массы, замедления роста выявляются первой производной функции запасов – функцией их потока. Рост запасов денежной массы замедляется в 2008-2009 и 2014-2015 гг., подчёркивая вариативность современного процесса на фоне кризисных явлений.

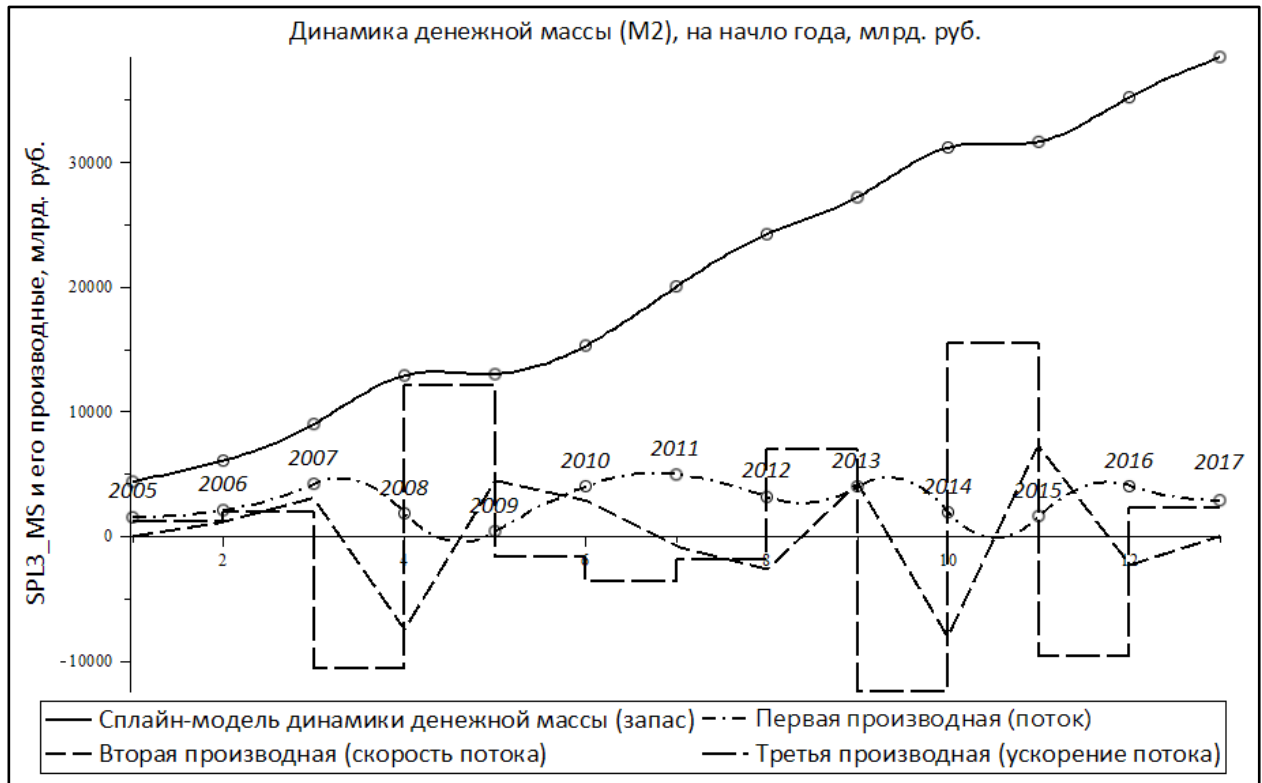


Рисунок 2 – Динамика денежной массы (M2) на начало года, млрд. руб. в 2005-2017 гг. Кубическая сплайновая темпоральная модель с тремя производными – первая производная (поток, штрихпунктир), вторая (скорость потока, пунктир) и третья (ускорение потока, ступенчатая пунктирная линия). Система компьютерной математики MAPLE 17

Аналитика призвана привлечь в исследование динамических потоков весь спектр непрерывного математического анализа, включающий дифференцирование и интегрирование. Явное выделение и исследование экономических потоков

(приростов или первых производных функции запасов) раньше выявляет будущие изменения в динамике самих запасов. Следует обратить внимание, что производная второго порядка и интеграл явно привлечены в, важную в теории

сплайнов, теорему Холлидея о минимальности нормы или минимальности кривизны кубического сплайна, ставшую эталоном его внутренней оптимальности.

Ещё большая полезность производных обнаруживается при отображении взаимосвязи запасов и их потока в фазовом пространстве. Применением производных как функции динамических изменений запасов определяется их вклад

в организацию фазовых портретов – нового инструмента экономического анализа непрерывных динамических изменений. В фазовом пространстве с помощью производных строятся фазовые портреты на плоскости вида  $OYY'$  или в трёхмерном измерении с осями  $OYY'T$ , что особенно полезно при анализе цикличности или сезонности динамических потоков.

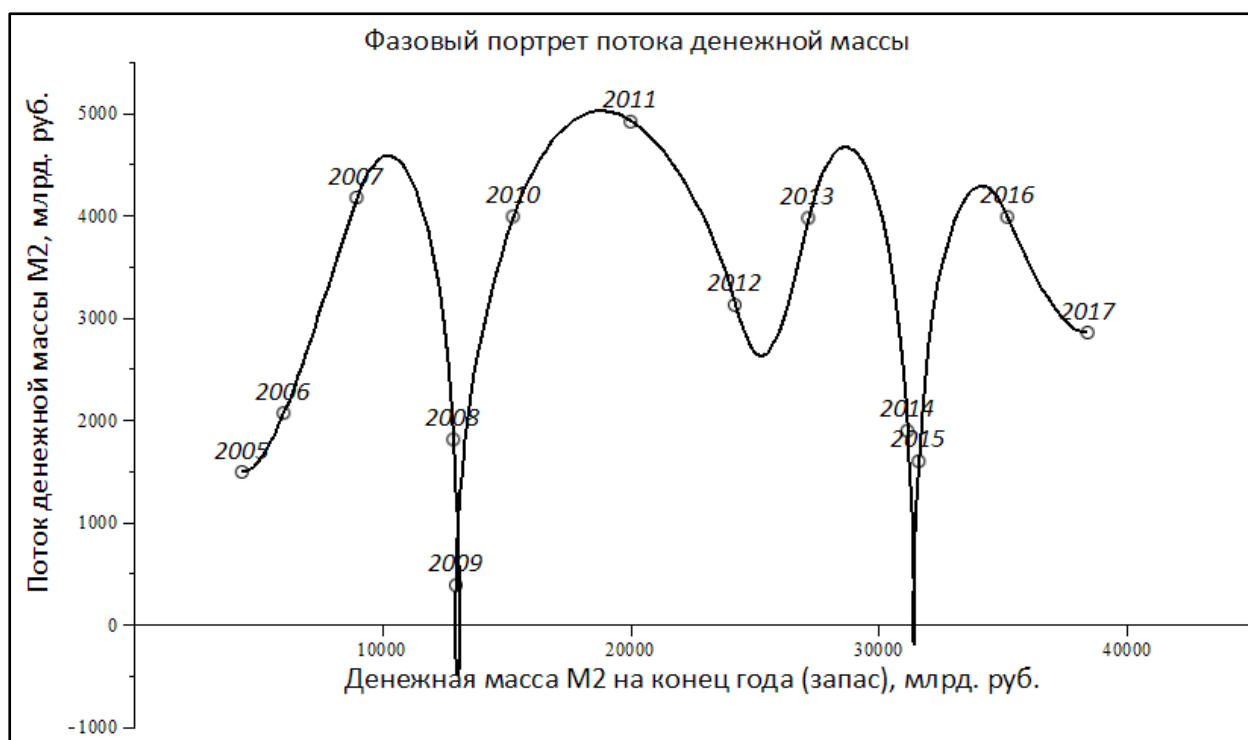


Рисунок 3 – Фазовый портрет потока денежной массы ( $M2$ ) в России с 2005 по 2017 гг., на начало года, млрд. рублей. Фазовая траектория обнаруживает «циклы роста» в изменениях запасов денежной массы замедлениями потока в 2008-2009 и 2014-2015 гг.

Применительно к экономическим потокам, осями фазовой плоскости становятся динамика показателя типа «запас» и его первая производная – динамика показателя типа «поток». Теперь каждая точка фазовой плоскости будет представлена двумя координатами – значением функции запасов ( $Y$ ) и значением её первой производной – функции потока ( $Y'$ ) в каждый момент времени ( $t$ ). Динамика потока представляется движением точки на фазовой плоскости – фазовой траекторией потока. Фазовая траектория становится графическим образом известной взаимосвязи между запасами и пото-

ками, аналитически описывающей соотношение между функцией и её первой производной.

Динамические потоки становятся той формой представления экономического движения, которая способна выявлять «циклы роста» колебаниями скорости роста – первой производной функции экономического движения. Примером можно считать фазовую траекторию роста денежной массы в России, которая совершенно не прерывается периодами спада запасов в абсолютном выражении (Рис. 3). В то же время, поток денежной массы существенно замедляется в 2008 и

2014 годах, о чём говорит приближение первой производной (скорости роста запасов) к нулю, образуя «циклы роста» в экономике современной России.

**Выводы.** Применительно к экономическим потокам, выдающаяся роль производной обнаруживается механизмом преобразования «запасов» в экономические «потоки». Вспомним научную аксиому: поток – это первая разность или первая производная запаса:  $F(t) = \Delta S(t)/\Delta t$  или  $F(t) = dS(t)/dt = S'$ .

Аналогию отношения между переменной и её производной (или её разностью) по времени и отношения между запасом и потоком мы встречаем у [6]. В частности, там приводится пример, в котором производная изменения запаса капитала является потоком чистых инвестиций:  $K'(t) = I(t) - D(t)$ .

Роль производных в экономической динамике до сих пор недостаточно оценивалась экономистами. Это естественно, так как производные им откуда-то надо брать. Заметим, что роль производных простирается на взаимосвязь «новой эконометрики» и эконофизики. Первая производная функции физического движения является величиной, прямо пропорциональной «импульсу». Так как произведение первой производной на массу в физике даёт «физический импульс» – аналогично определяем и меру экономического «движения». В экономике первая производная, являясь частью «экономического импульса» (произведение производной изменения цены или стоимости «экономической массы» на сами объёмы товаров, услуг, ресурсов) может стать инструментом исследования законов «экономического сохранения». Ускорение движения или вторая производная функции движения также находят своё применение в механике, технике и физических исследованиях. Ускорение, умноженное на некоторую константу (в механике называемую «массой», в экономике это опять же некоторый финансовый актив), даёт нам «силу». В экономи-

ческой физике и в экономике в целом всё ещё остаётся задачей будущего более широкое использование производных для исследования «экономических импульсов» и «экономических сил».

В задачах управления товарными, финансовыми и др. потоками часто необходимо наблюдать одновременно изменение двух взаимосвязанных переменных – накопленных запасов и их потока.

Подвижность современной мега- и макроэкономической динамики, как и частая смена «временных классов» внутри временных участков моделей экономического развития, обращает исследователей к новым подходам, к парадигме «полиформности» и к современному профессиональному инструментарию. Успехи новых подходов, при исследовании динамических потоков, так или иначе можно связывать с выдающейся ролью производных в экономике.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бессонов В.А. Введение в анализ российской макроэкономической динамики переходного периода. – М.: Издательство ЦЭМИ РАН, 2003. – 151 с.
- 2 Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь. – М.: Наука, 1987. – 510 с.
- 3 Жак С.В. Математические модели менеджмента и маркетинга. – Ростов-на-Дону: ЛаПО, 1997. – 316 с.
- 4 Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения. – М.: Издательство «Мир», 1972. – 318 с.
- 5 Ильясов Р.Х., Крюков С.В. Анализ корреляций в колебаниях скорости экономического развития // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. – 2017. – № 4. – С. 68-78.
- 6 Jeffrey Parker. Economics 314. Coursebook, 2010г.

*Рукопись поступила в редакцию 02.06.2019г.*

JEL code: C 10

ON THE MULTIDIMENSIONAL ROLE OF DERIVATIVES IN THE ANALYSIS AND MODELING  
OF ECONOMIC FLOWS

R. H. Ilyasov  
Chechen state University

Flows, being a more mobile part of the economic system, attract the attention of researchers in the search for trends and factors of dynamic development. At the same time, most studies on the role of flows in Economics are verbal or limited to describing them in discrete-time models. The known relationship between stocks and flows in discrete models is realized by calculating chain increments, which is sufficient to solve problems, in particular, accounting. The analytical description of flows by continuous functions capable of preserving the accuracy of empirical data, while adapting to their structural and variable dynamics, seems to be more in demand. In models with continuous time, the solution to the problem of converting the function of the dynamics of stocks in the flow becomes an appeal to differentiation. The most successful mathematical construct that preserves the accuracy of the empirical economic signal when approximating discrete dynamics of stocks becomes cubic splines. Continuity, differentiability and piecewise structure of splines are useful when working with flows-when replacing the lattice function of stock dynamics with a continuous model, when converting stock dynamics into flows, when studying the cyclicity of flows in phase space. The paper demonstrates the effectiveness of the treatment of derivatives of cubic splines in modeling and analysis of economic flows on the example of the dynamics of the money supply

Keywords: flow, stocks, spline, approximation, derivative, phase analysis

References

1. Bessonov V. A. Introduction to the analysis of the Russian macroeconomic dynamics of the transition period. – M.: Publishing house of Institute for Economics and mathematics Russian Academy of Sciences, 2003. - 151 p.
2. Lopatnikov L. I. Economics and mathematics dictionary. - Moscow: Nauka, 1987. - 510 p.
3. Jacques S. V. Mathematical models of management and marketing. - Rostov-on-don: Lapo, 1997. - 316 PP.
4. Alberg John., Neilson E., Walsh J. Spline theory and its applications. - Moscow: Mir Publishing House, 1972. – 318 PP.
5. Ilyasov R. H., Kryukov S. V. analysis of correlations in fluctuations of economic development speed. Modern science-intensive technologies. Regional supplement. - 2017. - No. 4. Pp. 68-78.
6. JeffreyParker. Economics 314. Coursebook, 2010.